CH2 - 1er S

Variations des fonctions

Rédacteur : Yann BANC

Le mot du prof :

Ce chapitre vous permet de revoir les fonctions usuelles et de découvrir de nouvelles fonctions usuelles : valeur absolue et racine carrée. La fin du chapitre est consacrée à l'étude des fonctions associées. Dans ce chapitre nous verrons de nombreuses notions essentielles comme la définition de la variation d'une fonction ou encore la démonstration de la stricte croissance de la fonction racine carrée.

Sommaire

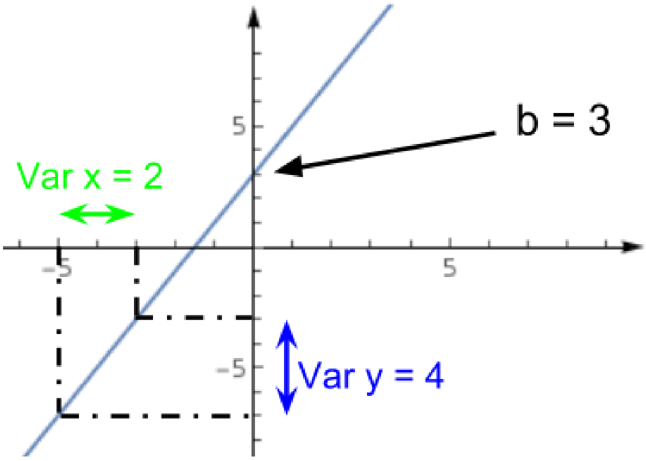
1 Pré-requis de seconde - Fonctions de référence

1.1 Fonction affines et linéaires

Une fonction affine a pour représentation graphique une droite.

Une fonction affine est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\,x + b$, a est le coefficient directeur et b est l'ordonnée à l'origine. Les coefficients a et b peuvent facilement être lus sur un graphique.

Voici le tracé d'une fonction affine, déterminons son expression par lecture graphique :



$$a = \frac{Var\ y}{Var\ x} = \frac{4}{2} = 2$$

Conclusion : $f(x) = 2x + 3$

<u>A retenir sur la pente :</u>

La pente traduit l'évolution verticale de la fonction pour un avancement horizontale de 1.

Cette évolution peut être positive ou négative. Si la pente vaut 0, la fonction est constante.

Entre deux points $A(xA\,;\,yA)$ et $B(xB;yB)$ avec $xA < xB$ la pente est $a = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$

<u>Exercice corrigé :</u>

a. Soit f la fonction représentée par une droite qui passe par les points $\mathrm{A}(2;-2)$et $\mathrm{B}(4;2)$, déterminer l'équation de f(x)

b. Soit g la fonction représentée par une droite qui passe par les points $\mathrm{C}(4;8)$et $\mathrm{D}(-2;6)$ déterminer l'équation de f(x)

Solution :

Pour $f(x) : a = \frac{2-(-2)}{4-(2)} = \frac{4}{2} = 2\ donc\ f(x) = 2x + b$

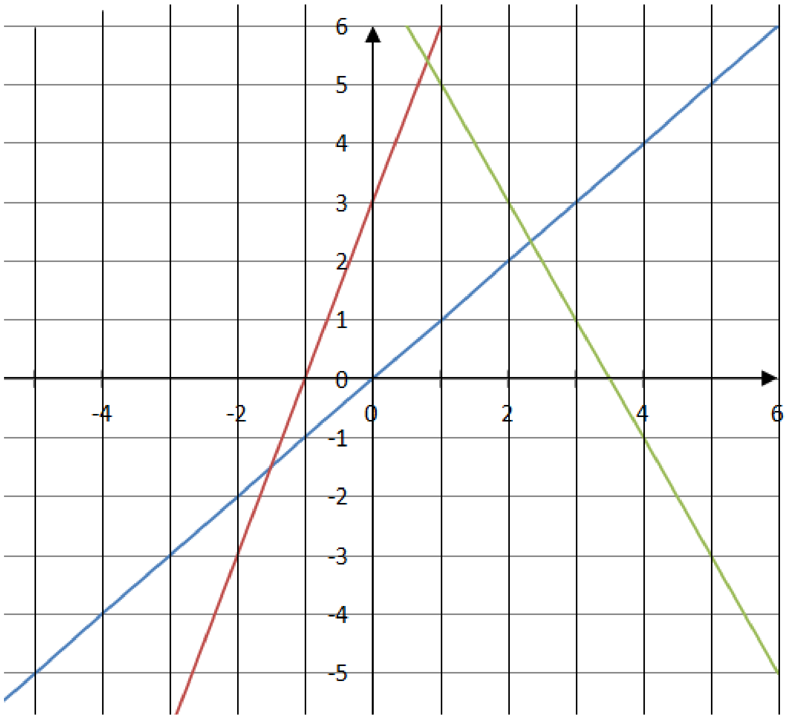
$et\ f(2) = -2\ donc\ 2 \times (-2) + b = -2\ donc\ b = \frac{1}{2}\ \ donc\ f(x) = 2x + \frac{1}{2}$

Pour $g(x) : a = \frac{8-6}{4-(-2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\ donc\ g(x) = \frac{1}{3}x + b$

$et\ g(4) = 8\ donc\ \frac{1}{3} \times 4 + b = 8\ donc\ b = 8 - \frac{4}{3} = \frac{20}{3}\ donc\ g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{20}{3}$

Exercice corrigé :

a. Aidez-vous du graph pour déterminer l'équation des fonctions suivantes



e(x) f(x) h(x)

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de f(x) et h(x).

Solutions :

a)

$e(x) = x$

$f(x) = 3x + 3$

$h(x) = -2x + 7$

b) On pose $3x + 3 = -2x + 7 \iff x = \frac{4}{5}$

ensuite on calcul $f(\frac{5}{4}) = \frac{12}{5} + 3 = \frac{27}{5}$

donc le point d'intersection est $P(\frac{5}{4}; \frac{27}{5})$

Exercice :

a. Soit f, la fonction affine dont la représentation graphique passe par les points A(2;-1) et B(3;9) , déterminer l'équation de f(x).

b. Soit g, la fonction affine dont la représentation graphique passe par les points C(5;-2) et B(-4;8) , déterminer l'équation de g(x).

c. Déterminer le point d'intersection des courbes de f et g.

d. En déduire les positions relatives de f et de g.

Exercice :

a. Soit d, la fonction affine dont la représentation graphique passe par les points A(-5;-1) et B(0;9) , déterminer l'équation de d(x).

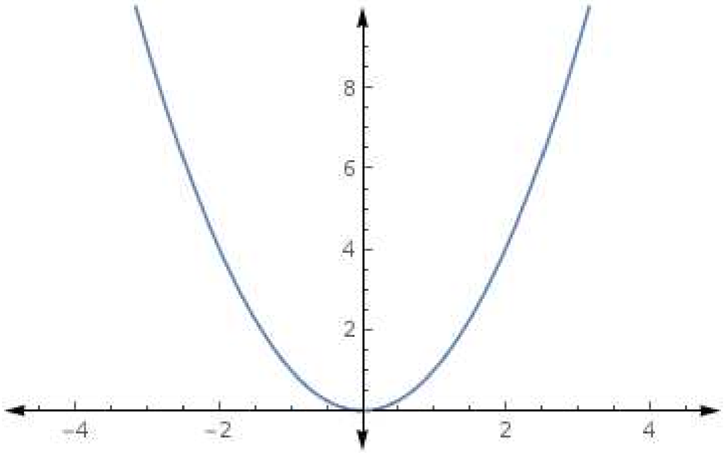
b. Soit m, la fonction affine dont la représentation graphique est parallèle à la représentation graphique de d et qui passe par le points K(2;2), déterminer l'équation de m(x).

1.2 Fonction carré

La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Comme tout polynôme, la représentation de cette fonction est une parabole.

Voici la courbe de la fonction :



On constate que la fonction est strictement décroissante sur]- ;0] et strictement croissante sur [0 ; + [, nous verrons dans ce chapitre une définition précise et mathématiques de la croissance d'une fonction.

Exercice corrigé :

Résoudre A) $x^2 > 9$ B) $x^2 = 16$ C) $x^2 + 2x + 4 = 9$ $(en\ détéctant\ une\ indentité\ remarquable)$

$$x^2 > 9 \Rightarrow x < -3 \text{ ou } x > 3 \Rightarrow S =]-\infty; -3[\cup]3\ ;\ +\infty[$$

$$x^2 = 16 \Rightarrow S = \{-4\ ; 4\}$$

$$x^2 + 2x + 4 = 9 \Rightarrow (x+2)^2 = 9 \Rightarrow (x+2) = 3 \text{ ou } (x+2) = -3 \Rightarrow S = \{1; -5\}$$

Exercice :

a) Tracer à la calculette les courbes des fonctions suivantes :

$f: x \to x^2$; $g: x \to x^2 - 3$; $h: x \to x^2 + 3$

Que remarque-t-on ?

b) Donner graphiquement le nombre de solutions à chaque équation :

f(x) = 0 ; g(x) = 0 ; h(x) = 0

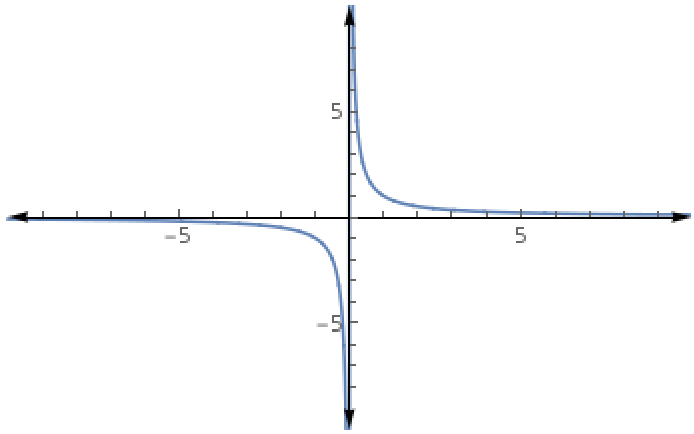
Si ces solutions existent ont dit que ce sont des racines du polynôme.

1.2 Fonction inverse

La fonction inverse est définie sur $]-\infty; 0[\ U\ ]0\ ; +\infty\ [= \mathbb{R}^*$ par f(x) = 1x.

Le tracé de cette courbe ne peut pas se faire sans lever le crayon, nous dirons que la courbe présente une discontinuité en 0.

Nous étudierons plus précisément le phénomène constaté en 0 en classe de terminale. La fonction inverse est toujours décroissante.



1.3 Variation d'une fonction

On comprend assez facilement la notion de croissance et de décroissance, or il n'est pas triviale de donner une définition mathématiques précise de ce qu'est la croissance ou la décroissance d'une fonction. Donnons ici ces définitions :

Croissance :

Soit f, une fonction définie sur un intervalle I et a et b deux éléments de I tels que a < b.

On dit que f est croissante sur I si et seulement si f(a) f(b).

Stricte croissance :

Soit f, une fonction définie sur un intervalle I et a et b deux éléments de I tels que a < b.

On dit que f est strictement croissante sur I si et seulement si f(a) < f(b).

Décroissance :

Soit f, une fonction définie sur un intervalle I et a et b deux éléments de I tels que a < b.

On dit que f est décroissante sur I si et seulement si f(a) f(b).

Stricte décroissance :

Soit f, une fonction définie sur un intervalle I et a et b deux éléments de I tels que a < b.

On dit que f est strictement croissante sur I si et seulement si f(a) > f(b).

Exercice corrigé :

Soient n et m deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que $3 < n < m < 5$

a) Donner un encadrement de $\frac{1}{(2+n)^2}$ et de $\frac{1}{(2+m)^2}$.

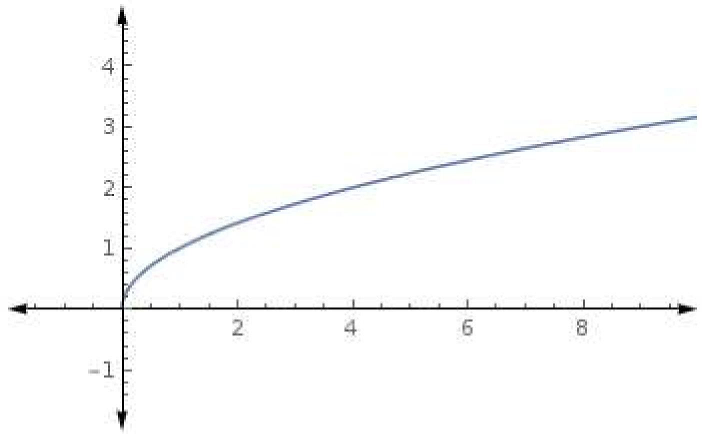
Solution :

$$3 < n < m < 5 \Rightarrow 5 < n+2 < m+2 < 7 \Rightarrow 25 < (n+2)^2 < (m+2)^2 < 49 \Rightarrow \frac{1}{25} < \frac{1}{(n+2)^2} < \frac{1}{(m+2)^2} < \frac{1}{49}$$

2 De nouvelles fonctions

2.1 La fonction racine carré

La fonction racine carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ qui associe à tout antécédent x de $\mathbb{R}^+$ l'image $\sqrt{x}$.



x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	↗	

Propriété :

La fonction $\sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

La démonstration de cette propriété peut vous être demandée en examen.

ROC : Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}^+$ tels que a < b.
Nous nous intéressons au signe de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ cela peut encore s'écrire:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{1} \times \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} < 0$$

Le signe de $a - b$ est strictement négatif car $a < b$ et le signe de $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$ car une racine est toujours positive donc la somme de deux racines l'est aussi.

Conclusion : on démontre que $a < b \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} < 0 \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$ ce qui prouve la stricte croissance de la fonction racine carré.

Remarque $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est la quantité conjuguée de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

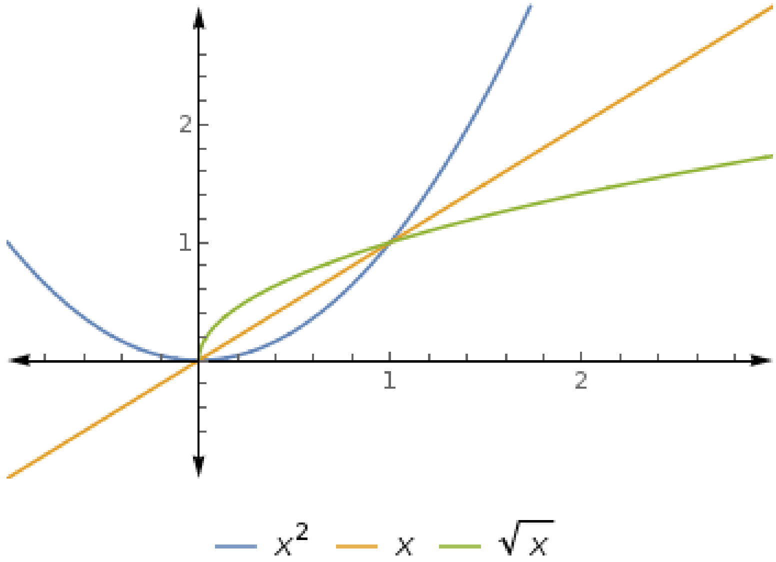
Exercice :

Démontrer que la fonction racine carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2.2 Position relative des courbe $y = x$; $y = x^2$ et $y = x$

Propriété :

- **pour $x \in [0\ ;\ 1]$ on a $x^2 \leq x \leq x$**
- **pour $x \in [1\ ;\ +\infty\ [$ on a $x^2 \geq x \geq x$**



La démonstration de cette propriété peut vous être demandée en examen.

ROC :

- Soit $x \in [0\ ;\ 1]$
  On s'intéresse au signe de $x - x^2$ qui peu encore s'écrire $x(1 - x)$
  Analysons le signe de ce produit de facteurs :
  $0 \leq x \leq 1 \;\Rightarrow\; 0 \geq -x \geq -1 \;\Rightarrow\; 1 \geq 1 - x \geq 0$, on multiplie cette inéquation par x sans changer le signe car $x \geq 0$. Ceci nous donne :$x \geq x(1 - x)$
  Ce qui prouve que $x \geq x^2$

  De même, on s'intéresse au signe de $\sqrt{x} - x$ qui s'écrit aussi $\sqrt{x}\,(1 - \sqrt{x}\,)$
  Analysons le signe de ce produit de facteurs :
  $\sqrt{x} > 0$, c'est une propriété de la racine carré
  $0 \leq x \leq 1$ par la croissance de racine carrée on a $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$
  soit $0 \geq -\sqrt{x} \geq -1$ soit $1 \geq 1 - \sqrt{x} \geq 0$
  Ainsi $\sqrt{x}(1 - \sqrt{x}\,) \geq 0$ ce qui prouve que $\sqrt{x} - x \geq 0$ et donc que $\sqrt{x} \geq x$

  Finalement en réunissant les deux résultats précédent on montre que $\sqrt{x} \geq x \geq x^2$.

- Soit $x \in [1\ ;\ +\infty\ [$
  On s'intéresse au signe de $x - x^2$ qui peu encore s'écrire $x(1 - x)$.
  Analysons le signe de ce produit de facteurs :
  $$1 \leq x \;\Rightarrow\; -1 \geq -x \Rightarrow\; 0 \geq 1 - x \underset{x>0}{\Longrightarrow} x(1 - x) \geq 0$$
  Ainsi $x - x^2 \geq 0$ ce qui prouve que $x \geq x^2$.
  En adoptant un raisonnement identique on montre que $\sqrt{x} \geq x$
  Finalement en réunissant les deux résultats précédent on montre que $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$.

2.3 La fonction valeur absolue

Définition**:**

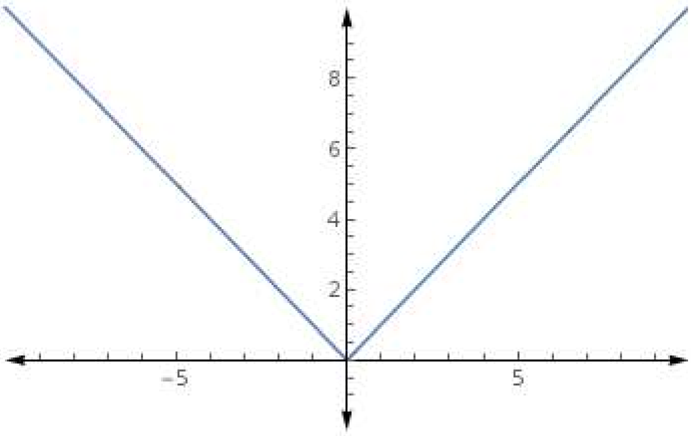
La fonction valeur absolue est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui associe à tout réel $\boldsymbol{a}$ l'image $|\boldsymbol{a}|$ que nous nommerons "valeur absolue de $\boldsymbol{a}$".

Propriété :

On définit |a| par

$$\boldsymbol{Si\ x[0\ ;\ +\infty\ [\ alors\ |x| = x}$$

$$\boldsymbol{Si\ x\ ]-\infty\ ;\ 0]\ alors\ |x| = -x}$$



Propriété :

- La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{-}$et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+}$.
- La fonction valeur absolue est paire car $|x| = |-x|$. Cela se traduit graphiquement par un axe de symétrie qui est l'axe Oy.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lvert x \rvert$	↘	0	↗

Exercice corrigé :

Résoudre

A) $|x-3| > 2$ **B)** $|x| > -1$ **C)** $|x+3| < 6$

$|x-3| > 2 \Rightarrow x-3 < -2\ ou\ x-3 > 2\ \Rightarrow x < 1\ ou\ x > 5 \Rightarrow S =]-\infty\ , 1[\ U\ ]5\ ;\ +\infty[$

$|x| > -1\ , cela\ est\ par\ définition\ toujours\ vrai\ donc\ S = \mathbb{R}$

$|x+3| < 6 \Rightarrow -6 < x+3 < 6 \Rightarrow -9 < x+3 < 3\ donc\ S =]-9\ , 3\ [$

3 Les fonction associées

3.1 Somme d'une fonction et d'une constante

Définition :

En partant d'une fonction $u(x)$ définie sur un intervalle I, il est possible de générer une autre fonction sur I, qui est $v(x) = u(x) + k$ $où\ k\ est\ une\ réel$.

Exemple : $u(x) = x^2$ et $v(x) = x^2 + 3$, ici $k = 3$.

Propriété :

- La fonction $v(x) = u(x) + k$ est définie sur le même intervalle que la fonction $u(x)$ et a des variations identiques.

3.2 Multiplication d'une fonction par un réel constant

Définition :

En partant d'une fonction $\mathrm{u(x)}$ définie sur un intervalle I, il est possible de générer une autre fonction sur I, qui est $\mathrm{v(x) = u(x) \times k}$ $\mathrm{où\ k\ est\ une\ réel}$.

Exemple : $u(x) = x^2\ et\ v(x) = 3x^2\ , ici\ k = 3$.

Propriétés :

- La fonction $\mathrm{v(x) = u(x) \times k}$ k est définie sur le même intervalle que la fonction $\mathrm{u(x)}$.
- Si $\mathrm{k} > 0$, les fonction $\mathrm{u(x)}$ et $\mathrm{v(x)}$ ont les mêmes variations.
- Si $\mathrm{k} < 0$, les fonction $\mathrm{u(x)}$ et $\mathrm{v(x)}$ ont des variations opposées.

3.3 Racine carré d'une fonction

Définition :

En partant d'une fonction $\mathrm{u(x)}$ définie et positive sur un intervalle I, il est possible de générer une autre fonction sur I, qui est $\mathrm{v(x)} = \sqrt{\mathrm{u(x)}}$.

Propriété :

- La fonction $\mathrm{v(x)} = \sqrt{\mathrm{u(x)}}$ est définie sur le même intervalle que la fonction $\mathrm{u(x)}$ et a des variations identiques.

Exemple : $u(x) = x^2 + 7\ et\ v(x) = \sqrt{x^2 + 7}$.

3.4 Inverse d'une fonction

Définition :

En partant d'une fonction $\mathrm{u(x)}$ définie et jamais nulle sur un intervalle I, il est possible de générer une autre fonction sur I, qui est $\mathrm{v(x)} = \frac{1}{\mathrm{u(x)}}$

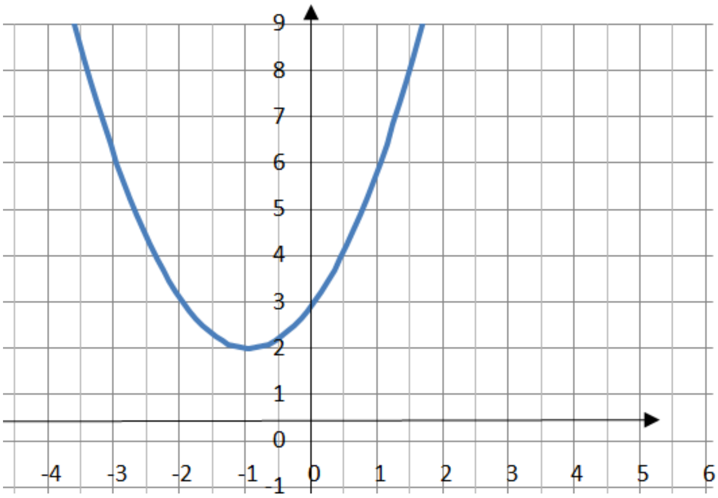
Propriété :

- La fonction $\mathrm{v(x)} = \frac{1}{\mathrm{u(x)}}$ est définie sur l'intervalle où $\mathrm{u(x)}$ est non nulle.
- Sur un intervalle L où u(x) ne s'annule pas, la fonction v(x) le même sens de variation que la fonction u(x).

Exemple : $\mathrm{u(x)} = \mathrm{x}^2 + 7$ et $\mathrm{v(x)} = \frac{1}{x^2+7}$.

Exercice corrigé :

Soit, $u(x)$ définie sur $\mathbb{R}$. On donne la courbe de la fonction :



a. À l'aide du graphique, donner le tableau de variation de la fonction $\frac{1}{u}$ et $\sqrt{u}$ **sur** $[-3\ ;\ \mathbf{1.5}\ ]$.

b. Donner un encadrement de $\frac{1}{u}$ et $\sqrt{u}$ **sur** $[-3\ ;\ \mathbf{1.5}\ ]$.

Solution :

a. la fonction $\frac{1}{u}$ à les variations opposée de u **sur** $[-3\ ;\ \mathbf{1.5}\ ]$

la fonction $\sqrt{u}$ à les même variations que u **sur** $[-3\ ;\ \mathbf{1.5}\ ]$

b. on a $pour\ x \in [-3\ ;\ \mathbf{1.5}\ ]; 2 \leq \mathrm{u(x)} \leq 8$

donc $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{u} \geq \frac{1}{8}$ et $\sqrt{2} \leq \sqrt{\mathrm{u(x)}} \leq \sqrt{8}$